EINE ANDERE ABHANDLUNG ÜBER DIE
SUMME DER AUS DEN POTENZEN DER
NATÜRLICHEN ZAHLEN ENTSPRINGENDEN
REIHEN AN REZIPROKEN, IN WELCHER
DIESELBE SUMMATION AUS EINER IN
HÖCHSTEN MASSE VERSCHIEDENEN
QUELLE ABGELEITET WERDEN*

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich vor vielen Jahren die Summen der in dieser allgemeinen Form enthaltenen Reihen

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc ins Unendliche}$$

wenn n eine gerade positive Zahl war, und zugleich auch dieser Reihen, wenn n eine ungerade Zahl war

$$1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} + \text{etc ins Unendliche}$$

*Originaltitel: „De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera, in qua eadem summationes ex fonte maxime diverso derivantur“, erstmals publiziert in „Miscellanea Berolinensia 7, 1743, pp. 172-192“, Nachdruck in „Opera Omnia: Series 1, Volume 14, pp. 138 - 155“, Eneström-Nummer E61, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Stefan Faldum, im Rahmen des Projektes „Hauptseminar Euler WS 2013/14“

mit Hilfe der Quadratur des Kreises dargeboten hatte und gezeigt hatte, dass die Summe durch dieselbe Potenz der Peripherie des Kreises, die der Exponent n anzeigt, ausgedrückt wird, gefiel dieser Gegenstand den scharf sinnigsten Geometern dermaßen, dass sie ihn nicht nur in höchstem Maße prüften, sondern selbige auch Eifer und Mühe darauf verwendeten, um dieselben Summen mit ihren vertrauten Methoden zu finden. Ich war von jener Zeit an auch viel mit dem Finden eines anderen Weges beschäftigt, der auf dasselbe führen würde, nicht so damit ich die gefundene Gültigkeit mehr bestätigen, wie damit ich die Grenzen der Analysis beim Behandeln von Reihen dieser Art weiter ausdehnen würde.

§2 Die Methode, die mich zur Summation dieser Reihen geführt hat, war selbstredend neu und bei einem Unternehmen solcher Art vollkommen unüblich. Sie war nämlich auf die Auflösung einer unendlichen Gleichung gestützt, all deren Wurzeln, deren Anzahl unendlich war, gekannt werden mussten. Ich habe nämlich diese ins Unendlich laufende Gleichung betrachtet:

$$\chi = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \frac{s^7}{5040} + \frac{s^9}{362880} - \text{etc}$$

die die Relation zwischen dem Kreisbogen s und seinem Sinus χ enthält, nachdem der ganze Sinus = 1 gesetzt worden ist. Weil aber demselben Sinus χ unzählige so positive wie negative Bogen entsprechen, hatte ich auf diese Weise von der Gleichung unzählige Wurzeln a posteriori erhalten; und weil ja die Koeffizienten jeder Gleichung von den Wurzeln abhängen, bin ich aus dem Vergleich dieser Koeffizienten mit den Wurzeln der Gleichung zu den Summen der zuvor erwähnten Reihen gelangt.

§3 Sofort habe ich freilich leicht erkannt, dass diese Methode sicher ist und nicht zu Wahrheit führen kann, wenn nicht bekannt wäre, dass jene Gleichung unendlichen Grades andere Wurzeln außer denen, welche die Natur des Sinus mir verschafft hatte, nicht in sich umfasst. Obwohl ich nämlich verstand, dass andere reelle Wurzeln außer den angegebenen in jener Gleichung nicht enthalten sind, gebürte es dennoch mit Recht zu bezweifeln, ob nicht imaginäre Wurzeln enthalten wären; wenn dies passiert wäre, hätten alle Summationen, welche ich daher gefunden habe, nicht mit der Wahrheit bestehen bleiben können. In diesem Zweifel war ich weiter bekräftigt worden, nachdem ich auf die gleiche aus einem Ellipsenbogen seinen Sinus oder die entsprechende Ordinate durch eine Reihe ausgedrückt hatte; obwohl nämlich gleichermaßen

unzählige Ellipsenbogen zugegen waren, die auf denselben Sinus bezogen werden, war es dennoch möglich gewesen, aus ihnen keine Summen von Reihen, die mit der Wahrheit verträglich wären, abzuleiten; die Begründung dieses Umstandes war ohne Zweifel in den vielen und vielleicht unendlich vielen imaginären Wurzeln gelegen, die in jene aus der Ellipse gebildeten Gleichung eingehen.

§4 Weil ich ja also zu jener Zeit keinen Beweis hatte, mit welchem für mich gewiss feststünde, dass die Gleichung zwischen dem Kreisbogen s und seinem Sinus χ von imaginären Wurzeln völlig frei ist, habe ich begonnen, die gefundenen Summen der Reihe auf Wahrheitsgehalt zu untersuchen; und zu erst habe ich freilich sofort entdeckt, dass diese Methode dieselbe Summe der Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc}$$

liefert, welche schon vor langer Zeit Leibniz angegeben hatte, welche Übereinstimmung zur Genüge aufzeigte, wenn die Gleichung einige imaginäre Wurzeln enthielte, dass deren Summe notwendigerweise $= 0$ ist. Darauf habe ich die Reihen der höheren Potenzen so untersucht, dass deren Summen mit den Summen, welche ich einwenig zuvor durch Approximation gefunden hatte, verglich, bei welcher Aufgabe ich erneut eine Übereinstimmung entdeckt habe. Und wegen dieser Gründung war ich vollkommen bestätigt, dass jene Gleichung, die mich zu all jenen Summen geführt hatte, mit überhaupt keinen imaginären Wurzeln beschmutzt ist; und so habe ich nicht bezweifelt, dass sie diese äußerst wahren Summen erzeugt.

§5 In dieser Meinung bestärkte mich aber völlig eine andere lediglich analytische Methode, mit deren Hilfe ich darauf alleine durch Integrationen dieselbe Summe dieser Reihe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc}$$

gefunden hatte, und fast auf die gleiche Weise hat der höchst scharfsinnige Herr Nicolaus Bernoulli dieselbe Summe im in Buch X der kommen. Acod. Petropol beigefügten Schediasmus bewiesen. Obwohl aber auf diese Weise die analytische Rechnung zum Finden all derselben Summen geführt werden zu können schien, können dennoch weder ich noch irgendjemand anderer

mit der Gleichung Rechnung zu höheren Potenzen gelangen. Dies verleitet mich fast dazu, dass ich glaubt, dass kein anderer Weg außer der Auflösung einer unendlichen Gleichung nicht offensteht, der die Summen aller Potenzen zusammen liefern würde.

§6 Diese fast völlig vergessene Sorge haben neuen in mir die vom hochgeehrten Herrn Daniel Bernoulli erhaltenen Briefe wieder aufkommen lassen, in denen er mir dieselben Gründe zu zweifeln bezüglich meiner Methode entgegenbrachte und zugleich bedeutet hat, dass der hochgeehrte Cramer von denselben Zweifeln gehemmt wird, dass er meine Methode billigen kann. Diese sehr freundschaftlichen Anmerken haben mich dazu bewegt, dass ich die ganze Aufgabe von Neuem noch einmal bearbeitet und mich sowohl um das Beweisen der Gültigkeit dieser Methode als auch um das Aufspüren eines anderen Weges dieselben Reihen zu summieren bemühe. In jedem der beiden Unterfangen also in den Besitz des Gewünschten gekommen werde ich diese zwei Aufgaben in dieser Abhandlung ausführen. Zuerst werde ich natürlich beweisen, dass in der oben erwähnten unendlichen Gleichung keine imaginären Wurzeln enthalten sind und sich daher über die Gültigkeit der daher abgeleiteten !Hunde! nicht weiter zweifeln lässt. Als zweites werde ich hingegen eine neue und nicht nur von der ersten in höchstem Maße verschiedene Methode, sondern auch eine, um viele andere Dinge zu erhellen, ein Feld eröffnende, die durch Integrationsregeln allein die ganze Aufgabe erledigt.

§7 Ich habe den zuerst versprochenen Beweis aus der Auflösung dieses Binoms

$$a^n + b^n$$

in seine reellen Faktoren erhalten. Jeder einzelne Faktor dieses Binoms ist nämlich in dieser Form enthalten

$$aa - 2ab \cos \left(A \frac{(2k-1)\pi}{n} \right) + bb$$

und es werden alle Faktoren erhalten, wenn anstelle von $2k-1$ nacheinander alle ungeraden Zahlen kleiner als der Exponent n eingesetzt werden; und wenn n eine ungerade Zahl war, dann muss außer diesen trinomialen Faktoren der einfache $a+b$ hinzugefügt werden. Wenn man daher den Rest hat

$$a^n - b^n$$

ist zuerst ein einfacher Faktor von ihm $a-b$, die übrigen reellen trinomialen sind in dieser Form enthalten

$$aa - 2ab \cos \left(A \frac{2k\pi}{n} \right) + bb$$

und alle Faktoren dieser Art werden erhalten, wenn anstelle von $2k$ nacheinander alle geraden Zahlen (die Null ausgenommen) kleiner als der Exponent n geschrieben werden, und wenn n selbst eine gerade Zahl war, muss außerdem der einfache Faktor $a+b$ hinzugefügt werden. Auf diese Weise werden also ganz und gar alle reellen Faktoren der Formel

$$a^n \pm b^n$$

dargeboten werden können, das Produkt all welcher diese Formel selbst ergibt. Im Übrigen ist es hier anzumerken, dass π den Halbumfang des Kreises bezeichnet, dessen Radius = 1 ist, oder dass π der den zwei rechten gleichen Winkel ist.

§8 Daher kann ich nun apriori alle Wurzeln oder Faktoren dieses unendlichen Ausdrucks angeben

$$s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{s^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9} - \text{etc}$$

Dieser Ausdruck ist nämlich diesem äquivalent

$$\frac{e^{s\sqrt{-1}} - e^{-s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

während e die Zahl bezeichnet, deren Logarithmus = 1 ist, und weil gilt

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

während n eine unendliche Zahl ist, wird der vorgelegte unendliche Ausdruck auf diesen zurückgeführt werden

$$\frac{\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}}$$

der zuerst den einfachen Faktor s hat, welchen freilich die Betrachtung unserer Reihe selbst aufzeigt. Um die übrigen Faktoren zu finden, vergleiche ich diesen Ausdruck mit der Form $a^n - b^n$; es wird sein

$$a = 1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n} \text{ und } b = 1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}$$

und daher

$$aa + bb = 2 - \frac{2ss}{nn} \text{ und } 2ab = 2 + \frac{2ss}{nn}$$

Jeder beliebige Faktor wird also in dieser Form enthalten sein

$$2 - \frac{2ss}{nn} - 2 * \left(1 + \frac{ss}{nn}\right) \cos\left(A \frac{2k\pi}{n}\right)$$

und daher werden ganz und gar alle Faktoren hervorgehen, wenn für $2k$ nacheinander alle geraden Zahlen bis ins Unendliche eingesetzt werden, deshalb weil n eine unendliche Zahl bezeichnet.

§9 Weil aber n eine unendliche Zahl ist, wird der Bogen $\frac{2k\pi}{n}$ eine unendliche Zahl sein, bis $2k$ auch eine unendliche Zahl wird, dennoch kleiner als n . Es wird also sein

$$\cos\left(A \frac{2k\pi}{n}\right) = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{nn}$$

woher der allgemeine Faktor in diese Form übergeht

$$-\frac{4ss}{nn} + \frac{4kk\pi\pi}{nn}$$

woher, nachdem der bekannte Term auf die Einheit zurückgeführt worden ist, der Faktor entsteht

$$1 - \frac{ss}{kk\pi\pi}$$

der, nachdem anstelle von k nacheinander alle Zahlen $1,2,3$ etc ins Unendliche eingesetzt werden, alle Faktoren liefert. Wenn daher aber k so ins Unendliche übergeht, dass $2k$ zu n ein endliches Verhältnis erhält, dann werden wegen

$$\cos\left(A \frac{2k\pi}{n}\right) < 1$$

die Terme $\frac{ss}{nn}$ in Bezug auf die nicht aufgehobene Einheit verschwinden und der Faktor $1 - \cos\left(A \frac{2k\pi}{n}\right)$ wird konstant werden und geht daher nicht in die Rechnung ein, was in ihm der Bogen s nicht enthalten ist.

§10 Auf diese Weise haben wir also alle Faktoren der vorgelegten Formel erhalten

$$s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{etc}$$

die daher dem aus diesen unendlich vielen Faktoren bestehenden Produkt genau gleich sein wird

$$s(1 - \frac{ss}{\pi\pi})(1 - \frac{ss}{4\pi\pi})(1 - \frac{ss}{9\pi\pi})(1 - \frac{ss}{16\pi\pi}) \text{ etc}$$

aus deren Vergleich mit den Koeffizienten der Terme der Reihe sofort die Summen dieser Reihen folgen

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \text{etc}$$

wenn m irgendeine gerade Zahl bezeichnet, und es kann also nicht weiter über deren Gültigkeit gezweifelt werden.

§11 Wenn wir auf die gleiche Weise diese Reihe betrachten

$$1 - \frac{ss}{1 \cdot 2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{s^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8} - \text{etc}$$

wird sie auf diese Form zurückgeführt werden

$$\frac{(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n})^n - (1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n})^n}{2}$$

während n eine unendliche Zahl bezeichnet. Die Division des Binoms

$$(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}) + (1 - \frac{2\sqrt{-1}}{n})^n$$

werden also zugleich die Divisionen der vorgelegten Reihe sein, und zwar alle. Nachdem diese Form mit $a^n + b^n$ verglichen worden ist, wird sein

$$a = 1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}, b = 1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}, aa + bb = 2 - \frac{2ss}{nn} \text{ und } 2ab = 2 + \frac{2ss}{nn}$$

jeder einzelne Divisor der vorgelegten Formel ist also in diesem Ausdruck enthalten

$$2(1 - \frac{ss}{nn}) - 2(1 + \frac{ss}{nn}) \cos(A \frac{(2k-1)\pi}{n})$$

oder in diesem

$$2(1 - \cos(A \frac{(2k-1)\pi}{n})) - \frac{2ss}{nn}(1 + \cos(A \frac{(2k-1)\pi}{n}))$$

Weil im Divisor nur auf die Unbekannte geachtet wird, wird jeder beliebige Divisor sein

$$1 - \frac{ss(1 + \cos(A \frac{(2k-1)\pi}{n}))}{nn(1 - \cos(A \frac{(2k-1)\pi}{n}))}$$

nachdem der unbekannte Term der Einheit gleich gesetzt worden ist, weil in der Reihe selbst der erste Term = 1 ist.

§12 Wegen der unendlichen Zahl n wird aber sein

$$1 + \cos(A \frac{(2k-1)\pi}{n}) = 2 \text{ und } 1 - \cos(A \frac{(2k-1)\pi}{n}) = \frac{(2k-1)^2 \pi \pi}{2nn}$$

woher jeder einzelne Divisor sein wird

$$1 - \frac{4ss}{(2k-1)^2 \pi \pi}$$

und wenn anstelle von 2k-1 alle ungeraden Zahlen bis ins Unendliche eingesetzt werden, werden alle Divisionen der vorgelegten Reihe entspringen

$$1 - \frac{ss}{1 \cdot 2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc}$$

welche also das Produkt aus diesen an der Zahl unendlich vielen Faktoren sein wird

$$(1 - \frac{4ss}{\pi \pi})(1 - \frac{4ss}{9\pi \pi})(1 - \frac{4ss}{25\pi \pi})(1 - \frac{4ss}{49\pi \pi}) \text{ etc}$$

aus deren Vergleich mit der Reihe selbst alle Reihen der Potenzen summiert werden wie zuvor. Und so ist bewiesen worden, dass jene unendlich vielen Gleichungen, welche ich zu jener Zeit behandelt habe, keine anderen Wurzeln außer diesen, welche ich aus der Natur der Sinus und Kosinus a posteriorie erhalten habe.

§13 Nachdem die Gültigkeit der Methode, mit deren Hilfe ich vorher die Summen von Reihen dieser Art angegeben habe, schreite ich dazu heran, eine andere von dieser völlig verschiedene Methode zu erklären, die allein aus den Prinzipien des Integralkalküls hergeholt ohne jegliche Umwege die Summen aus selben Reihen mit wundersamer Leichtigkeit verschafft. Diese Methode aber ist auf zwei Lehrsätze gestützt, deren Beweis ich in der oberen Abhandlung „Über das Finden von Integralen, wenn der variablen Größe nach der Integration ein bestimmter Wert zugeteilt wird“ gegeben habe, woher ich sie ohne Beweis entnehmen werde. Der erste verhält sich so:

"Das Integral der Differentialformel

$$\frac{\chi^{p-1} + \chi^{q-p-1}}{1 + \chi^q} d\chi$$

wird so genommen, dass es für $\chi = 0$ gesetzt verschwindet, wenn nach der Integration $\chi = 1$ gesetzt wird, diesen Wert gegeben

$$\frac{\pi}{q \sin(A \frac{p\pi}{q})}$$

während π den halben Umfang des Kreises bezeichnet, dessen Radius = 1 ist, in welchem Kreis ich zugleich den Sinus des Bogens $\frac{p\pi}{q}$ genommen zu werden festlege"

Der andere diesem fast gleiche Lehrsatz verhält sich so:

"Das Integral dieser Differentialformel

$$\frac{\chi^{p-1} - \chi^{q-p-1}}{1 - \chi^q} d\chi$$

wird so genommen, dass es für $\chi = 0$ gesetzt verschwindet, wenn in ihm nach der Integration $\chi = 1$ gesetzt wird, diesen Wert geben

$$\frac{\pi \cos(A \frac{p\pi}{q})}{q \sin(A \frac{p\pi}{q})} \text{ oder } \frac{\pi}{q \tan(A \frac{p\pi}{q})} "$$

Die Beweise dieser Lehrsätze schreiten nach klarer Ordnung fort, zuerst habe ich nämlich gemäß der üblichen Regeln die Integrale dieser Formeln allgemein untersucht und nach Finden von diesen anstelle der Variable χ die Einheit festgelegt. Danach bin ich daher zu einer endlichen Reihe an Sinus gelangt, die, weil die Bogen in einer arithmetischen Progression fortschritten, eine Summation zuließ und diese Ausdrücke selbst lieferte.

§14 Wir wollen nun die erste Integralformel nehmen

$$\int \frac{\chi^{p-1} + \chi^{q-p-1}}{1 + \chi^q} d\chi$$

welche in eine Reihe aufgelöst diese zwei geometrischen Progressionen geben wird

$$\begin{aligned} & \int d\chi (\chi^{p-1} - \chi^{q+p-1} + \chi^{2q+p-1} - \chi^{3q+p-1} + \text{etc}) \\ & + \int d\chi (\chi^{q-p-1} - \chi^{2q-p-1} + \chi^{3q-p-1} - \chi^{4q-p-1} + \text{etc}) \end{aligned}$$

Das Integral von dieser wird so angenommen, dass es für $\chi = 0$ gesetzt verschwindet, so durch eine Reihe ausgedrückt werden:

$$\frac{\chi^p}{p} + \frac{\chi^{q-p}}{q-p} - \frac{\chi^{q+p}}{q+p} - \frac{\chi^{2q-p}}{2q-p} + \frac{\chi^{2q+p}}{2q+p} + \frac{\chi^{3q-p}}{3q-p} - \text{etc}$$

Wenn wir daher nun $\chi = 1$ setzten, wird durch den ersten Lehrsatz die Summe dieser Reihe

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q-p} - \frac{1}{q+p} - \frac{1}{2q-p} + \frac{1}{2q+p} + \frac{1}{3q-p} - \frac{1}{3q+p} - \frac{1}{4q-p} + \text{etc}$$

sein

$$= \frac{\pi}{q \sin(A \frac{p\pi}{q})}$$

§15 Auf die gleiche Weise wird die andere Integralformel

$$\int \frac{\chi^{p-1} - \chi^{q-p-1}}{1 - \chi^q} d\chi$$

durch eine Reihe integriert geben

$$\frac{\chi^p}{p} - \frac{\chi^{q-p}}{q-p} + \frac{\chi^{q+p}}{q+p} - \frac{\chi^{2q-p}}{2q-p} + \frac{\chi^{2q+p}}{2q+p} - \frac{\chi^{3q-p}}{3q-p} + \text{etc}$$

Deswegen wird durch den anderen Lehrsatz, wenn wir $\chi = 1$ setzten, die Summe dieser Reihe

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q-p} + \frac{1}{q+p} - \frac{1}{2q-p} + \frac{1}{2q+p} - \frac{1}{3q-p} + \frac{1}{3q+p} - \text{etc}$$

sein

$$= \frac{\pi \cos(A \frac{p\pi}{q})}{q \sin(A \frac{p\pi}{q})}$$

solange p und q positive Zahlen waren und $q > p$, was im Folgenden immer angenommen werden muss; andernfalls verschwände nämlich das auf diese Weise genommene Integral nicht für $\chi = 0$ gesetzt.

§16 Es sein $\frac{p}{q} = s$; und nach Multiplizieren der gefundenen Reihen mit q werden wir diese zwei auf eine endliche Reihe zurück geführten Reihen haben

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin(As\pi)} &= \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} + \frac{1}{3-s} - \frac{1}{3+s} - \text{etc} \\ \frac{\pi \cos(As\pi)}{\sin(As\pi)} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} - \frac{1}{3-s} + \frac{1}{3+s} - \text{etc} \end{aligned}$$

und die Summen dieser Reihen werden wahr sein, welche Zahl auch immer durch s angezeigt wird, ob eine rationale oder irrationale, und so wird das Kontinuitätsgesetz nicht weiter verletzt wie zuvor, wo anstelle von p und q ganze Zahlen angenommen werden müssen. Ja diese Summen weichen sogar nicht von der Wahrheit ab, auch wenn für s größere Zahlen als die Einheit festgelegt werden. Wenn nämlich $s = 1$ ist oder jede beliebige ganze Zahl, dann werden die Reihen unendlich wegen des einen ins Unendliche übergehenden Termes, zugleich wachsten aber die dargebotenen Summen wegen $\sin(As\pi) = 0$ ins Unendliche. Daher erstrecken sich diese Summen so weiter, dass sie überhaupt keine Einschränkung erfordern.

§17 Aus diesen allgemeinen Reihen werden schon die Reihen für die Quadratur des Kreises sowohl von Leibniz also auch von Gregory und unzählige andere abgeleitet, deren besondere es hier darzubieten gefällt. Es sein $q = 2$ und $p = 1$; es wird sein

$$\sin(A \frac{\pi}{2} = 1) \text{ und } \cos(A \frac{\pi}{2}) = 0$$

und daher entstehen die folgenden Reihen

$$\frac{\pi}{2} = 1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \text{etc}$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc}$$

und

$$\frac{0\pi}{2} = 1 - 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \text{etc}$$

von denen jene die Leibniz'sche Reihe ist, diese hingegen von selbst hervorgeht.
Es sei $q = 3$ und $p = 1$; es wird sein

$$\sin\left(A\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } \cos\left(A\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

woher die folgenden Reihen entstehen

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc} \\ \frac{\pi}{3\sqrt{3}} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc} \end{aligned}$$

Es sei $q = 4$, $p = 1$; es wird sein

$$\sin\left(A\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } \cos\left(A\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und daher entstehen die folgenden Reihen

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \text{etc} \\ \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc} \end{aligned}$$

Es sei $q = 6$, $p = 1$; es wird sein

$$\sin\left(A\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \text{ und } \cos\left(A\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

woher die folgenden Reihen ihren Ursprung nehmen

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} &= 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \text{etc} \\ \frac{\pi}{3\sqrt{3}} &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \text{etc} \end{aligned}$$

Und all diese Reihen hatte die erste Methode auch verschafft.

§18 Weil wir ja also gesehen haben, dass die Summe dieser Reihe

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} + \frac{1}{3-s} - \text{etc}$$

ist

$$= \frac{\pi}{\sin(A\pi s)}$$

und von dieser

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} - \frac{1}{3-s} - \text{etc}$$

ist

$$= \frac{\pi \cos(A\pi s)}{\sin(A\pi s)}$$

welcher Wert auch immer dem Buchstaben s zugeteilt wird, ist es offenbar, dass dieselben Gleichheiten Geltung behalten, wenn anstelle von s $s+ds$ gesetzt wird, oder, was auf dasselbe zurückgeht, wenn jene Reihen mit ihren Summen differenziert werden, nachdem die Größe s als Variable festgelegt worden ist. Daher weil ist

$$d \sin(A\pi s) = \pi ds \cos(A\pi s) \text{ und dass } d \cos(A\pi s) = -\pi ds \sin(A\pi s)$$

wird, nachdem die Differentiale genommen worden sind und überall durch $-ds$ geteilt worden ist, sei

$$\frac{\pi \cos(A\pi s)}{(\sin(A\pi s))^2} = \frac{1}{ss} - \frac{1}{(1-s)^2} - \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \frac{1}{(2+s)^2} - \frac{1}{(3-s)^2} - \text{etc}$$

$$\frac{\pi \pi}{(\sin(A\pi s))^2} = \frac{1}{ss} + \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \frac{1}{(2+s)^2} + \frac{1}{(3-s)^2} + \text{etc}$$

Wenn daher also anstelle von s wie der $\frac{p}{q}$ eingesetzt wird und auf beiden Seiten durch qq geteilt wird, werden die folgenden summierten Reihen hervorgehen

$$\frac{\pi \cos(A \frac{p\pi}{q})}{qq(\sin(A \frac{p\pi}{q}))^2} = \frac{1}{pp} - \frac{1}{(q-p)^2} - \frac{1}{(q+p)^2} + \frac{1}{(2q+p)^2} + \frac{1}{(2q-p)^2} - \text{etc}$$

$$\frac{\pi \pi}{qq(\sin(A \frac{p\pi}{q}))^2} = \frac{1}{pp} + \frac{1}{(q-p)^2} + \frac{1}{(q+p)^2} + \frac{1}{(2q-p)^2} + \frac{1}{(2q+p)^2} + \text{etc}$$

§19 Wir wollen festlegen, dass $q = 2$ und $p = 1$ ist; es wird $\sin(A\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\cos(A\frac{\pi}{2}) = 0$ sein, woher die folgenden Reihen hervorgehen werden

$$0 = 1 - 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \text{etc}$$

$$\frac{\pi\pi}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc}$$

von welchen die Gültigkeit der ersten per se klar ist, die zweite hingegen hierauf zurückgeht

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} \text{ etc}$$

Es sei $q = 3$ und $p = 1$; es wird $\sin(A\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos(A\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ sein, woher diese zwei Reihen entstehen werden

$$\frac{2\pi\pi}{27} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} - \frac{1}{10^2} + \text{etc}$$

$$\frac{4\pi\pi}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \text{etc}$$

Es sei $q = 4$ und $p = 1$; es wird $\sin(A\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos(A\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sein, und daher werden wir diese zwei Reihen entspringen

$$\frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \text{etc}$$

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \text{etc}$$

Es sei $q = 6$ und $p = 1$; es wird $\sin(A\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ und $\cos(A\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sein, in welchem Fall diese Reihen erhalten werden werden

$$\frac{\pi\pi}{6\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{1}{17^2} - \frac{1}{19^2} + \text{etc}$$

$$\frac{\pi\pi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \text{etc}$$

Und aus diesen Reihen werden nicht schwer jene zwei anfänglichen Reihen abgeleitet, welche ich mit Hilfe der vorhergehenden Methode in dieser Art gefunden habe, natürlich

$$\frac{\pi\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \text{etc}$$

$$\frac{\pi\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \text{etc}$$

§20 Damit die Summen der höheren Potenzen leichter durch ununterbrochene Differentiation gefunden werden können, wollen wir die Summe und die Reihen einzeln differenzieren. Es sei also

$$\frac{\pi}{\sin(A\pi s)} = P \text{ und } \frac{\pi \cos(A\pi s)}{\sin(A\pi s)} = Q$$

und wir werden die folgenden durch die Differentiale jeden Grades von P und Q ausgedrückten Summationen haben

$$P = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} + \frac{1}{3-s} - \text{etc}$$

$$Q = \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} - \frac{1}{3-s} + \text{etc}$$

$$-\frac{dP}{1ds} = \frac{1}{ss} - \frac{1}{(1-s)^2} - \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \frac{1}{(2+s)^2} - \frac{1}{(3-s)^2} - \text{etc}$$

$$-\frac{dQ}{1ds} = \frac{1}{ss} + \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \frac{1}{(2+s)^2} + \frac{1}{(3-s)^2} - \text{etc}$$

$$\frac{ddP}{1*2ds^2} = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{(1-s)^3} - \frac{1}{(1+s)^3} - \frac{1}{(2-s)^3} + \frac{1}{(2+s)^3} + \frac{1}{(3-s)^3} - \text{etc}$$

$$\frac{ddQ}{1*2ds^2} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{(1-s)^3} + \frac{1}{(1+s)^3} - \frac{1}{(2-s)^3} + \frac{1}{(2+s)^3} - \frac{1}{(3-s)^3} + \text{etc}$$

$$\frac{-d^3P}{1*2*3ds^3} = \frac{1}{s^4} - \frac{1}{(1-s)^4} - \frac{1}{(1+s)^4} + \frac{1}{(2-s)^4} + \frac{1}{(2+s)^4} - \frac{1}{(3-s)^4} - \text{etc}$$

$$\frac{-d^3Q}{1*2*3ds^3} = \frac{1}{s^4} + \frac{1}{(1-s)^4} + \frac{1}{(1+s)^4} + \frac{1}{(2-s)^4} + \frac{1}{(2+s)^4} + \frac{1}{(3-s)^4} + \text{etc}$$

Allgemein wird man also diese Summation haben

$$\frac{\pm d^{n-1}P}{1*2*3*...*(n-1)ds^{n-1}} = \frac{1}{s^n} \pm \frac{1}{(1-s)^n} - \frac{1}{(1+s)^n} \mp \frac{1}{(2-s)^n} + \frac{1}{(2+s)^n} \pm \frac{1}{(3-s)^n} - \text{etc.}$$

$$\frac{\pm d^{n-1}Q}{1*2*3*...*(n-1)ds^{n-1}} = \frac{1}{s^n} \mp \frac{1}{(1-s)^n} + \frac{1}{(1+s)^n} \mp \frac{1}{(2-s)^n} + \frac{1}{(2+s)^n} \mp \frac{1}{(3-s)^n} - \text{etc.}$$

wo die oberen Vorzeichen gelten, wenn n eine ungerade Zahl war, die unteren hingegen, wenn n eine gerade Zahl ist.

§21 Um also diese Summen tatsächlich zu bestimmen, ist es nötig, dass wir die Werte der Differentiale irgendeiner Ordnung der Größen P und Q finden; damit dies leichter und kürzer geschehen kann, wollen wir festlegen

$$\sin(A\pi s) = \chi \text{ und } \cos(A\pi s) = y$$

und es wird sein

$$P = \frac{\pi}{\chi} \text{ und } Q = \frac{\pi y}{\chi}$$

Weiter wird in der Tat sein

$$d\chi = \pi y ds \text{ und } ds = -\pi \chi ds$$

woher durch die Differentiationsregeln die folgenden Werte erhalten werden

$$P = \frac{\pi}{\chi}$$

$$-\frac{dP}{ds} = \frac{\pi\pi}{\chi\chi} y$$

$$\frac{d^2P}{ds^2} = \frac{\pi^3}{\chi^3} (y^2 + 1)$$

$$-\frac{d^3P}{ds^3} = \frac{\pi^4}{\chi^4} (y^3 + 5y)$$

$$\frac{d^4P}{ds^4} = \frac{\pi^5}{\chi^5} (y^4 + 18y^2 + 5)$$

$$-\frac{d^5P}{ds^5} = \frac{\pi^6}{\chi^6} (y^5 + 58y^3 + 61y)$$

$$\frac{d^6P}{ds^6} = \frac{\pi^7}{\chi^7} (y^6 + 179y^4 + 479y^2 + 61)$$

$$-\frac{d^7P}{ds^7} = \frac{\pi^8}{\chi^8} \begin{pmatrix} +6 \cdot 1 & +4 \cdot 179 & +2 \cdot 479 & & \\ y^7 & & y^5 & & y^3 & & y \\ & +3 \cdot 178 & +5 \cdot 479 & +7 \cdot 61 & & & \end{pmatrix}$$

aus diesen letzten Ausdruck zugleich das Bildungsgesetz klar ist, mit dessen Hilfe aus dem Differential einer Ordnung das Differential der folgenden Ordnung gebildet werden kann. Und daher wird die Summe dieser Reihe

$$\frac{1}{s^n} \pm \frac{1}{(1-s)^n} - \frac{1}{(1+s)^n} \mp \frac{1}{(2-s)^n} + \frac{1}{(2+s)^n} \pm \frac{1}{(3-s)^n} - \text{etc}$$

für jeden Wert des Exponenten n angegeben werden.

§22 Auf die gleiche Weise werden die Werte der Differentiale irgendeiner Ordnung der anderen Größe Q aufgefunden werden und es wird sein

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} y$$

$$-\frac{dQ}{ds} = \frac{\pi\pi}{\lambda\lambda} 1$$

$$\frac{d^2Q}{ds^2} = \frac{\pi^3}{\lambda^3} 2y$$

$$-\frac{d^3Q}{ds^3} = \frac{\pi^4}{\lambda^4} (4yy + 2)$$

$$\frac{d^4Q}{ds^4} = \frac{\pi^5}{\lambda^5} (8y^3 + 16y)$$

$$-\frac{d^5Q}{ds^5} = \frac{\pi^6}{\lambda^6} (16y^4 + 88y^2 + 16)$$

$$\frac{d^6Q}{ds^6} = \frac{\pi^7}{\lambda^7} (32y^5 + 416y^3 + 272y)$$

$$-\frac{d^7Q}{ds^7} = \frac{\pi^8}{\lambda^8} (64y^6 + 1824y^4 + 2880y^2 + 272)$$

$$\frac{d^8Q}{ds^8} = \frac{\pi^9}{\lambda^9} \begin{pmatrix} & +4 \cdot 1824 & +6 \cdot 2880 & +8 \cdot 272 & \\ 2 \cdot 64y^7 & & y^5 & & y^3 & & y \\ & +6 \cdot 64 & +4 \cdot 1824 & +2 \cdot 2880 & & & \end{pmatrix}$$

Das Bildungsgesetz der Progression ist hier in gleicher Weise klar, mit dessen Hilfe sich, so weil wie es beliebt, fortschreiten lässt; und daher wird die Summe jeder Reihe von Potenzen dargeboten werden können, die in dieser Form enthalten ist

$$\frac{1}{s^n} \mp \frac{1}{(1-s)^n} + \frac{1}{(1+s)^n} \pm \frac{1}{(2-s)^n} + \frac{1}{(2+s)^n} \mp \frac{1}{(3-s)^n} - \text{etc.}$$

In diesen Reihen sind aber nicht nur alle Reihen von Potenzen enthalten, welche die vorhergehende Methode verschafft hatte, sondern darüber hinaus unzählige andere. Ja diese Methode selbst scheint sogar, um viele andere sehr schöne Dinge zu finden, geeignet.